Relativitätstheorie

1.1 Grenzen der klassischen Physik

- Begriff Inertialsystem
- Klassisches Relativitätsprinzip
- Ätherhypothese und Michelsonexperiment
- Einsteinsche Postulate

1.2 Relativistische Effekte

- Relativität der Gleichzeitigkeit
- Zeitdilatation, Zwillingsparadoxon
- Längenkontraktion
- Experimentelle Bestätigungen
- Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit

1.3 Die Lorentztransformation

- Prinzip einer Koordinatentransformation (Gallilei-Transformation)
- Gleichungen der Lorentztransformation
- Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit (wegen dem Wurzelterm)
- Ergebnisse der Lorentztransformation: Längenkontraktion, Zeitdilatation, Relativität der Gleichzeitigkeit, Additionstheorem der Geschwindigkeiten

1.4 Relativistische Masse, Energie und Impuls

- relativistische Massenzunahme, relativistischer Impuls, Konsequenzen
- Exkurs: Kraft und Beschleunigung im relativistischen Fall
- Masse-Energie-Äquvalenz, Ruheenergie und relativistische Energie
- Massendefekt und Bindungsenergie
- Ausblick auf allgemeine Relativitätstheorie

1.5 Zusammenfassung und Systematisierung

- klassischer Grenzfall der kinetischen Energie
- relativistischer Energie- und Impulssatz
- relativistischer Pythagoras
- Systematisierung der Effekte

1.6 Anhang

- Berechnungen zur Lorentztransformation

1.1 Grenzen der klassischen Physik

- sehr komplexes Thema
- bei ausführlicher Behandlung: extrem viel Mathematik
  ⇒ oft nur qualitative Aussagen (aber nicht immer!)
- Wichtig: bei Überlegungen kein "Vorwissen" einbauen
  Effekte (Zeitdilatation, Längenkontraktion) oft schon bekannt
  Ziel: Ableitung, **warum** es diese Effekte gibt

Wichtiger Begriff: **Bezugssystem**
Bsp: Eisenbahnwagen, Bahnsteig, Erde, Karussell, fallender Stein
⇒ Erde und Karussell drehen sich, Stein wird schneller
⇒ besondere Bedingungen, System ist beschleunigt
⇒ **Trägheitsgesetz gilt nicht**

⇒ Spezielle RT betrachte diese Systeme **nicht**
Beschränkung auf **Inertialsysteme**

> **Inertialsysteme** sind Bezugssysteme, in denen das Trägheitsgesetz gilt. In ihnen bewegen sich Körper in Abwesenheit von Kräften geradlinig und gleichförmig, oder sie sind in Ruhe.

Hinweis:
- Erde ist *näherungsweise* ein Inertialsystem (sehr gute Näherung).
- Wir beschränken uns ab sofort auf Inertialsysteme

Betrachten
- Zug rel. zu Bahnsteig ⇒ bewegt sich geradlinig gleichförmig.
- Auto fährt im Zug ⇒ bewegt sich geradlinig gleichförmig.

Folge: **Auto** bewegt sich rel. zum **Bahnsteig** geradlinig **gleichförmig**
⇒ ist übertragbar auf beliebige Inertialsysteme:

> Alle Inertialsysteme bewegen sich untereinander geradlinig gleichförmig.

Gedankenexperiment:
- Wir befinden uns in einem Eisenbahnwagen. Fenster sind verhangen. Können wir entscheiden, **ob er sich bewegt**?

⇒ **Nein**
- Gibt es einen absoluten Ruhepunkt im Universum?

⇒ **Nein**
⇒ Ganz wichtige Aussage: **Klassisches Relativitätsprinzip**

> Inertialsysteme sind mit mechanischen Mitteln nicht unterscheidbar. Alle mechanischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab.

Identische Formulierung: Alle Gesetze der Mechanik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Problem:

Kann man Inertialsysteme anders, z. B. optisch, unterscheiden?

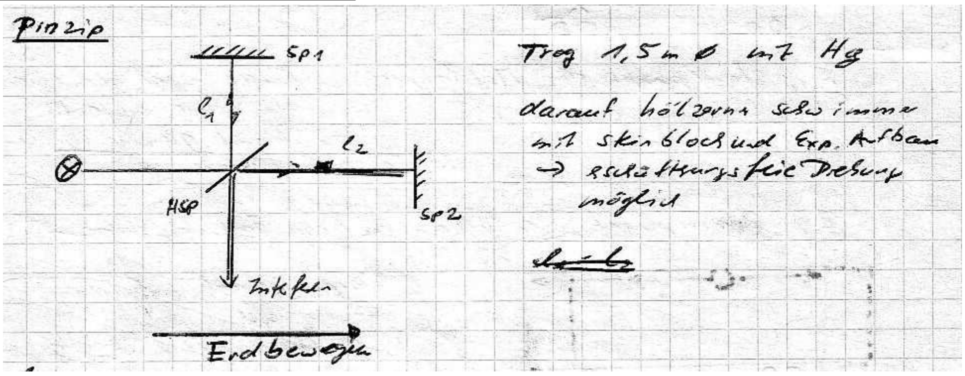
historische Situation Ende 19. Jh:

- Physik ließ sich fast vollständig mechanisch erklären
  - z.B. auch Wärme: Teilchenbewegung
- Ausnahme: Licht
  - · bekannt: Licht ist eine Welle (Interferenzen sind möglich)
  - · es fehlte ein Trägermedium
  - ⇒ Annahme: Äther existiert, ist das Trägermedium
- Aber:
  - · Äther müsste das gesamte Universum ausfüllen
  - · Äther ist in absoluter Ruhe
  - · Inertialsysteme (Erde!) bewegen sich rel. zum Äther
  - ⇒ Äther müsste nachweisbar sein

Das Michelsonexperiment

Abraham Albert Michelson, 1852 - 1931
Erstes Experiment: 1881 in Potsdam
Zweites Exp. 1887 in Cleveland, Ohio

Michelson-Interferometer



$l_1 = l_2 \Rightarrow$

- Laufzeiten für l_1 und l_2 sind verschieden, weil sich HSP und Sp1 sich rel. zum Äther bewegen
  ⇒ Gangunterschied ⇒ Interferenzen
- Drehung um 90° ⇒ l_1 und l_2 vertauschen ihre Aufgabe
  ⇒ Änderung der Interferenzen

Aber: Ergebnis

Keine Änderung der Interferenzen

auch bei späteren, noch viel exakteren Messungen

Konsequenz: **Es gibt keinen Äther.**

Die Lichtgeschwindigkeit ist offensichtlich unabhängig von:

- Bewegung des Bezugssystems
- Ausbreitungsrichtung

Später: Bestätigung mit Licht von Sternen ist erfolgt

Folgerung: Erweitertes Relativitätsprinzip (Einsteinsche Postulate)

Erstes Einsteinsches Postulat - Relativitätsprinzip

Inertialsysteme sind prinzipiell nicht unterscheidbar. Alle Gesetze der Physik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

Anders gesagt:
Inertialsysteme sind auch mit optischen Mitteln nicht zu unterscheiden.

Zweites Einsteinsches Postulat - Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Licht breitet sich in jedem Inertialsystem als konzentrische Kugelwelle aus, und zwar unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Infos:
Andere (gleichwertige) Formulierung

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters unabhängig und hat in allen Inertial-systemen den gleichen Wert.

⇒ d.h. Die Lichtgeschwindigkeit ist in alle Raumrichtungen gleich.

Meterdefinition:
Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird zum Naturgesetz erhoben:

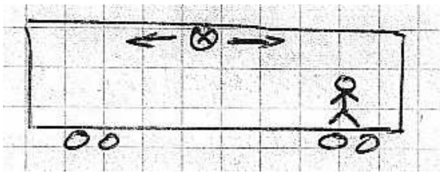
Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/299 792 458) Sekunden durchläuft. Die Lichtgesch-windigkeit c hat somit den festen Wert c = 299 792 458 m/s.

1.2 Relativistische Effekte

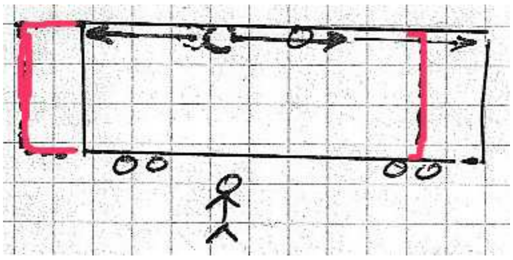
- Relativität der Gleichzeitigkeit
- Zeitdilatation
- Längenkontraktion

Relativität der Gleichzeitigkeit

Gedankenexperiment
Eisenbahnwagen, sehr schnell, Blitzlampe in der Mitte



Wahrnehmung des Mitfahrers:
Wände gleich weit von Lampe weg
⇒ Licht kommt **gleichzeitig** an.



Wahrnehmung der Person am Bahnsteig (**ruhender Beobachter**)
- hintere Wand eilt Licht entgegen, vordere entflieht

⇒ Licht erreicht hintere Wand eher
Ereignisse **nicht gleichzeitig**

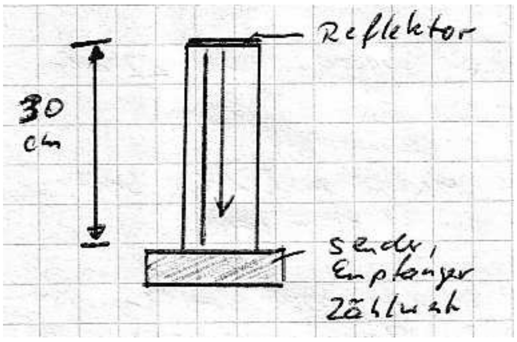
> Zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem an verschiednen Orten gleichzeitig ablaufen, laufen von einem anderen Inertialsystem aus betrachtet nicht gleichzeitig ab.

Anmerkung: Wichtig: An verschiedenen Orten, sonst natürlich auch gleichzeitig.

⇒ Erster Hinweis auf verschieden Zeitabläufe
⇒ Evt. Probleme mit der Zeitmessung in beiden Systemen

⇒ **Wir brauchen eine Uhr!**

Definition einer Lichtuhr

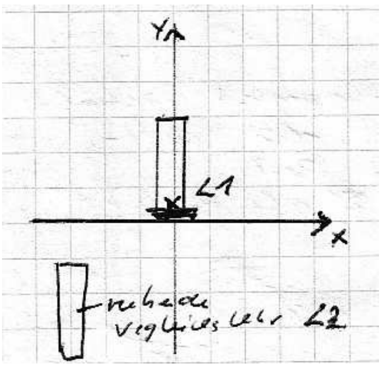


- verwenden Konstanz von c
- Laufzeit für 30 cm: 1 ns
- Lichtblitz ist nach 2 ns wieder da
  ⇒ neuen Blitz auslösen

⇒ Uhr tickt im 2 ns Takt

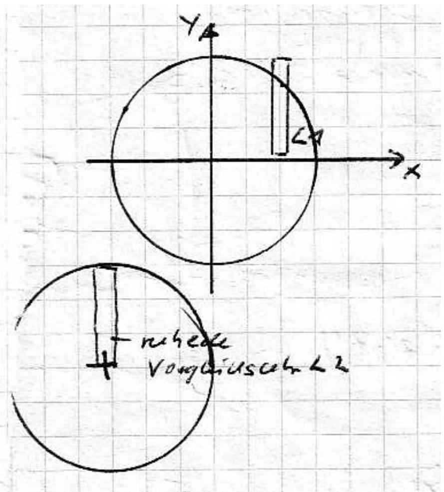
Zeitdilatation

Betrachten: schnell bewegte Uhr L1



- Vergleichsuhr L2 ruht, relativ zum gezeichneten Koordinatensystem
- bei Nulldurchgang durch ruhendes Koordinatensystem: Lichtblitz
- Mitbewegter Beobachter:
  Befindet sich in einem Inertialsystem. Nach 1 ns ist das Licht oben, nach 2 ns ist es wieder unten. Lichtuhr geht synchron zu allen anderen Uhren, auch zu biologischen.

Sichtweise des ruhenden Beobachters:



- 1 ns ist um, wenn Licht oberes ende der **eigenen** Uhr erreicht
- Licht **beider Uhren** breitet sich als Kugelwelle aus
- Lichtuhr L1 bewegt sich weg

⇒ Lichtwelle ist nach 1 ns noch nicht oben, nach 2 ns noch nicht unten
⇒ nächster Lichtblitz kommt zu spät
⇒ **Lichtuhr L1 geht nach**

Aber: Für mitbewegten Beobachter bleibt das Maß der Dinge **seine** Lichtuhr
⇒ Alle Prozesse (auch biologische, z.B. Alterung) laufen so schnell, wie diese (und alle anderen, synchron dazu gehenden Uhren) angeben.
⇒ Er kann nicht erkennen, was der ruhende Beobachter sieht

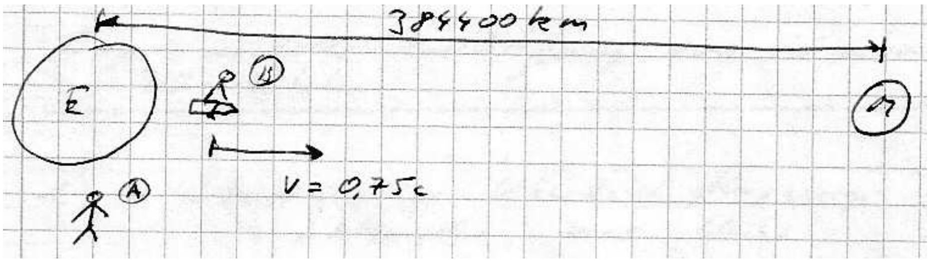
⇒ Aus Sicht des ruhenden Beobachters vergeht die Zeit des bewegten Beobachters langsamer (Zeitdehnung, Zeitdilatation)

In einem bewegten Bezugssystem vergeht die Zeit langsamer als in einem ruhenden Bezugssystem. Dieser Effekt heißt **Zeitdilatation**.

Folgerung: **Zwillingsparadoxon**
- ein Zwilling (A) fliegt mit v ≈ c zu Proxima Centauri, ca 4 Lichtjahre entfernt, beleibt 1 Jahr dort
- zweiter Zwilling (B) bleibt hier
- bei Rückkehr ist B ca. 9 Jahre, A nur ca. 2 Jahre gealtert

Längenkontraktion

Gedankenexperiment: Flug zu Mond mit v = 0,75c



Sicht des ruhenden Beobachters A
- B bewegt sich mit v = 0,75c auf den Mond zu
- benötigte Zeit (v=s/t): t = 1,71 ns

Unser Wissen:
- bewegter Beobachter erfährt Zeitdilatation
- für ihn vergehen t' = 1,13 s bis zum Aufschlag

Sicht des bewegten Beobachters B
- Mond bewegt sich auf mich zu mit v' = 0,75 c
- Zeit bis Aufschlag: t' = 1,13 s

⇒ Widerspruch: Gleiche Entfernung, gleiche Geschwindigkeit, aber verschiedene Zeiten

Lösung: für bewegten Beobachter B hat sich die Strecke zum Mond verkürzt: s' = 245256 km (statt 384400 km)
Längenkontraktion

Für einen schnell bewegten Beobachter verkürzen sich die Strecken in Bewegungsrichtung. Dieser Effekt heißt **Längenkontraktion**.

Kurzzusammenfassung:
- Schon behandelte Effekte:
  Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation, Längenkontraktion
- Noch zu besprechen:
  relativistische Masse, Additionstheorem der Geschwindigkeit

⇒ Alle Effekte gehen immer Hand in Hand
⇒ Auflösung alle scheinbaren Widersprüche möglich, wenn man alle Effekte berücksichtigt.

Experimentelle Belege:
- Atomuhr im Überschallfugzeug (Concorde) um die Erde, ruhende Vergleichsuhr bleibt am Startplatz
  ⇒ Uhr in Concorde geht nach (Zeitdilatation)
- Myonen entstehen in Hochatmosphäre, $\tau \approx 2{,}2\ \mu s$ ⇒ Flugstrecke mit v=c: 648 m
  ⇒ erreichen trotzdem die Erdoberfläche (Entfernung 20 km)
  ⇒ Je nach Sichtweise. Längenkontraktion aus Sicht des Myons oder Zeitdilatation für das Myon aus unserer Sicht

1.3 Die Lorentztransformation

Ziel: Berechnung (d.h. theoretische Herleitung) der Effekte

Idee: Zwei Koordinatensysteme:
ruhendes Koordinatensystem Σ
bewegtes Koordinatensystem Σ'
Zwei Beobachter:
ruhender Beobachter im Koord. System Σ
mitbewegter Beobachter im Koord. System Σ'

Ereignisse können in beiden Systeme beschrieben werden
ruhendes System: Koordinaten x, y, z, t
bewegtes System: Koordinaten x', y', z', t'

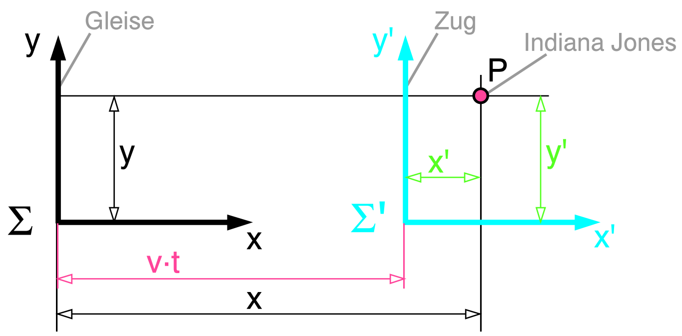
Ansatz: Koordinaten im bewegten System sind bekannt
Frage: was sieht der ruhende Beobachter?

⇒ müssen Koordinaten umrechnen
⇒ **Koordinatentransformation** x', y', z', t' ⇒ x, y, z, t und umgekehrt

Erklärung am klassischen Fall
⇒ Verstehen des Prinzips (kein Lernstoff)

Gallilei-Transformation

Σ' bewegt sich rel. zu Σ geradlinig gleichförmig mit v



Koordinaten:
mitbewegter Beobachter (Σ'): P(x', y')
ruhender Beobachter (Σ): P(x, y)

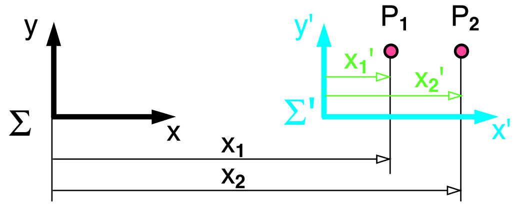
Umrechnung:

$$\boxed{x = x' + v \cdot t \qquad y = y' \qquad z = z'}$$

Gallilei-Transformation

Beispiele zur Anwendung von Koordinatentransformationen (Info)

Beispiel 1: Abstand zweier Punkte



gleicher Zeitpunkt: t

mitbewegter Beobachter: $L' = x'_2 - x'_1$

ruhender Beobachter: $L = x_2 - x_1$

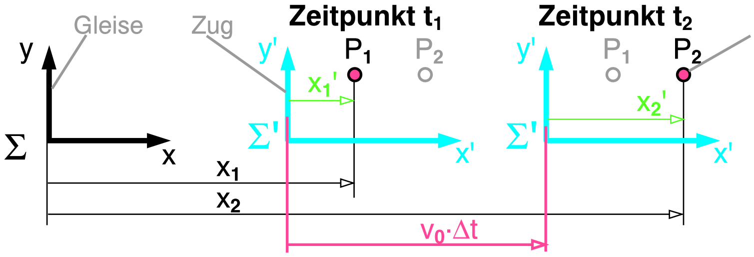
mit $x = x' + v \cdot t$

$L = (x_2' + v \cdot t) - (x_1' + v \cdot t)$

Beide messen den gleichen Abstand. → $\underline{L = L'}$

Beispiel 2: Geschwindigkeit

Körper bewegt sich in $\Delta t = t_2 - t_1$ von P_1 nach P_2



mitbewegter Beobachter: $v' = \dfrac{x'_2 - x'_1}{\Delta t}$ Indy relativ zum Zug

ruhender Beobachter: $v = \dfrac{x_2 - x_1}{\Delta t}$ mit $x = x' + v_0 \cdot t$

$$v = \frac{(x'_2 + v \cdot t_2) - (x'_1 + v \cdot t_1)}{\Delta t} = \frac{x'_2 - x'_1 + v_0 \cdot (t_2 - t_1)}{\Delta t}$$

$\boxed{v = v' + v_0}$ **Additionstheorem der Geschwindigkeit**

Herleitung mit Hilfe der Differentialrechnung:

geg: v' Geschwindigkeit aus Sicht von Σ'
ges: v Geschwindigkeit aus Sicht von Σ

$v = dx/dt$

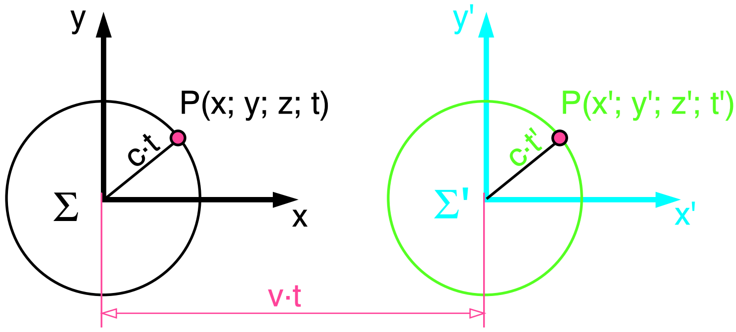
$x = x' + v_0 \cdot t$

$v = dx'/dt + v_0$

$\boxed{v = v' + v_0}$ **klassisches Additionstheorem der Geschwindigkeit**

Lorentz-Transformation

Σ' bewegt sich relativ zu Σ mit v entlang x



P ist in **beiden** Koordinatensystemen Punkt einer Licht-Wellenfront (Kugelwelle)

Raum-Pythagoras gilt für jeden Punkt der Wellenfront:

$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2}$ und $\boxed{x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2}$

Ergebnis: **Lorentz-Transformation**

$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y=y' \qquad z=z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Symmetrie beachten: wenn $x \Leftrightarrow x'$ und $t \Leftrightarrow t'$ dann $v \Rightarrow -v$:

Bedeutung der Gleichungen

- basieren auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (Erstes Einsteinsches Postulat)
- erlauben die Umrechnung sowohl der Raum- als auch der Zeit-Koordinaten zwischen Σ und Σ' (beide Umrechungsrichtungen)
- Für v<<c entfällt der Wurzelterm $\Rightarrow$ Gallileitransformation $x = x' + v \cdot t$
- Für kleine v und kleine Entfernungen entfällt der 2. Term in den Zeit-Gleichungen $\Rightarrow t = t'$ $\Rightarrow$ klassische Zeitverständnis.

> Die Gallileitransformation ist als Spezialfall für kleine Geschwindigkeiten und geringe Entfernungen in der Lorentztransformation enthalten.

Betrachtung des Wurzelterms:

v in % von c	$\sqrt{1-(v^2/c^2)}$	$1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$
0	1	1
10	0,995	1,005
50	0,866	1,155
90	0,436	2,294
99	0,141	7.09
99,9	0,0447	22,36
99,9999	0,00141	707,1

Die Lorentztransformation liefert erst für große Geschwindigkeiten v > 0,1c merkliche Abweichungen von der Gallileitransformation.

Beispiel: Raumstation: v = 8 km/s (≈ 0,002668 % c)
Wurzelterm $\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ = 0,999 999 999 643

Betrachten hohe Geschwindigkeiten v ≈ c
⇒ Wurzelterm geht gegen Null
⇒ $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ geht gegen unendlich
⇒ problematisch

v > c Radikant wird negativ
⇒ nicht mehr sinnvoll

Die Lichtgeschwindigkeit ist die obere Grenzgeschwindigkeit in der Relativitätstheorie. Sie kann nicht erreicht werden, weil sonst die Transformationsgleichungen unendlich liefern würden.

Hinweis: Das wird später noch an anderen Effekten (relativistische Massenzunahme) deutlich.

Folgerungen und Anwendungen der Lorentztransformation

- Lorentztransformation ermöglicht exakte Berechnung der genannten Effekte

⇒ Sehr aufwändig, viel Mathe

⇒ hier nur Angabe der Ergebnisgleichungen, Berechnungen als Beispiel / zur Info

Lernstoff: • Kennen der Effekte
• Kennen der Richtung (was wird größer, was wird kleiner)

1. Längenkontraktion

Situation: 1-m-Stab fliegt an uns vorbei

Welche Länge sieht der ruhende Beobachter?

Ergebnis $\boxed{\Delta L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta L'}$

1 m, für mitbew. Beob

ruhender Beob sieht weniger

$\Delta L < \Delta L'$

Ein Stab, der an uns vorbei fliegt, scheint uns verkürzt

2. Zeitdilatation

Situation: Uhr fliegt an uns vorbei

Wie schnell sieht sie der der ruhende Beobachter ticken?

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

mitbew. Beobacht. Uhr tickt im 1s-Takt

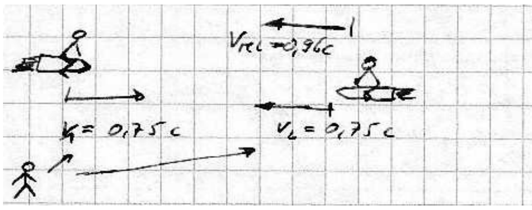
ruhender Beobachter bewegte Uhr tickt langsamer

Eine bewegte Uhr geht langsamer als ein ruhende Uhr

3. Relativität der Gleichzeitigkeit

Ob zwei (an verschiedenen Orten stattfindende) Ereignisse gleichzeitig passieren, hängt vom Bezugssystem ab.

4. Additionstheorem der Geschwindigkeit Neu



$$v_{rel} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$$

Bewegen sich zwei Beobachter sehr schnell aufeinander zu, so nimmt keiner der Beobachter eine Geschwindigkeit oberhalb der Lichtgeschwindigkeit wahr.

Hinweis: Die Berechnungen dazu befinden sich im Anhang.

1.4 Relativistische Masse, Energie und Impuls

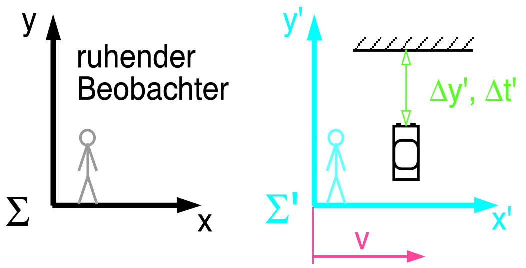
Zur Einführung:

Betrachten Ladungsträger im Beschleuniger

- klassisch: $F = m \cdot a$
  $v = a \cdot t \quad \Rightarrow$ keine Grenze für v
  Bedingung: m = konst.

- relativistisch: c ist obere Grenze
  Grund: relativistische Massenzunahme: $v \uparrow \Rightarrow m \uparrow \Rightarrow a \downarrow$

Beweis: Gedankenexperiment



- Auto fährt gegen Wand
- Zerstörung ist aus beiden Systemen betrachtet gleich

mitbewegter Beobachter: $v'_y = \dfrac{\Delta y'}{\Delta t'}$ (20m/s) $\quad v_x = 0$

Masse des Autos: m_0 (1000 kg)

Impuls: $p_y = m_0 \cdot v'_y$

ruhender Beobachter: $v_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ $\quad v_x$ sehr groß (0,85 c)

Es gilt: $\Delta y = \Delta y'$ keine Kontraktion in y-Richtung

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zeitdilatation
Auto braucht **mehr** Zeit
(vgl. Zwillingsparadoxon)

$\Rightarrow$ Geschwindigkeit: $v_y = v'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer (10,5 m/s)

Zerstörung gleich $\Rightarrow$ Energie und Impuls gleich
benutzen Impuls (Vektor, zerlegbar)

y-Komponente des Impulses: $m \cdot v_y = m_0 \cdot v'_y$

für ruhenden Beobachter — für bewegten Beobachter

$\Rightarrow \quad m = m_0 \dfrac{v'_y}{v_y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$ **relativistische Masse**

1898 kg

Jeder Körper hat in seinem Ruhesystem die kleinste Masse. Bewegt sich ein Körper, so vergrößert sich seine Masse.

Hinweis: Wegen Wurzelterm erst für v > 10%c relevant.

Interpretation der Gleichung:

$v\uparrow \;\Rightarrow\; m\uparrow \;\Rightarrow\; a\downarrow$ (größere Trägheit)

wenn $v \to c \;\Rightarrow\; m \to \infty \;\Rightarrow\; a \to 0$

$\Rightarrow$ c kann nicht erreicht werden.

Die Lichtgeschwindigkeit ist die Grenzgeschwindigkeit für einen Körper der Ruhemasse m_0. Sie kann nicht erreicht werden.

Zwischenbilanz

relativistische Masse: $m_{Rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

relativistischer Impuls: $p_{Rel} = m_{Rel} \cdot v$

Problem:

F wirkt $\Rightarrow W = F \cdot s \Rightarrow$ E-Zufuhr, E_{Kin} steigt

? Wohin geht die Energie?

$\Rightarrow$ in die Masse

$\Rightarrow$ Zusammenhang **Masse** $\leftrightarrow$ **Energie** existiert.

Herleitung:

- mathematisch sehr aufwändig, weil $m \neq$ konst.

$\Rightarrow F = \frac{dp}{dt}$ benutzen und integrieren: $E_{Kin} = \int F(s)\, ds$

Ergebnis:

$$E_{Kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2$$

$$\boxed{E_{Kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2}$$ relativistische kinetische Energie

Interpretation:

$m \cdot c^2$: Gesamtenergie des Körpers

$m_0 \cdot c^2$: Ruheenergie des Körpers

Folgerung:

Jeder Körper der Masse m besitzt Energie:

$$\boxed{E = m \cdot c^2}$$ Masse-Energie-Äquivalenz

Körper mit der Ruhemasse m_0: Ruheenergie: $E_0 = m_0 \cdot c^2$

Energie und Masse sind einander äquivalent. Energie besitzt Masse und Masse besitzt Energie.

Häufige Fehlinterpretation:

Masse kann in Energie umgewandelt werden.

Richtig ist:

E und m sind zwei Seiten einer Medaille. Sie sind **gleichwertig**.

Punkte zur Diskussion:

- Volle und leere Batterie
- Lichtteilchen (Photonen) als Energiepakete $\Rightarrow$ Masse
  $\Rightarrow$ Ablenkung im Gravitationsfeld
- Kernkraftwerk, Sonne, Massendefekt
- Bindungsenergie, Kern~ und chemisch (Δm sehr klein)
- Erde Massengewinn durch Sonnenstrahlung (5 t / Tag)
- Photonentriebwerk

Ausblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie

Spezielle RT
- Inertialsysteme
- alle gleichwertig
- Grav. wird nicht berücksichtigt, da sie die Körper beschleunigt

Allgemeine RT
- beschleunigte Systeme
  - ⇒ Systeme unterscheidbar
  - ⇒ Gravitationsfelder werden mit behandelt
    - z.B. Keine Unterscheidung möglich ob
      - beschleunigte Rakete oder
      - ruhende Rakete im Grav.-Feld

Erklärung weiterer Effekte möglich, z.B.

- Zwillingsparadoxon
  Zwilling A fliegt zu Proxima Centauri und kehrt zurück
  Seine Sicht (B): A hat sich bewegt, müsste weniger altern
  ⇒ Systeme sind nicht gleichwertig, A beschleunigt, B nicht
  ⇒ A altert langsamer, B nicht

- Ablenkung von Licht im Grav.Feld:
  Exakte Vorhersage nur mit ART

- Rot- und Blauverschiebung von Licht im Grav.Feld
  ⇒ schwarze Löcher, Grav. hält Licht gefangen

- Anderer Zeitablauf bei GPS / Gallileo-Satelliten
  Ursache: verringertes Gravitationsfeld in der Umlaufbahn

1.5 Zusammenfassung und Systematisierung

Problem 1:

Klassisch: $E_{Kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Gilt das noch?

⇒ Ja, Spezialfall für kleine Geschwindigkeiten

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x \qquad \text{wenn } x \ll 1$$

$$E_k = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2$$

$$E_k = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 c^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2}$$

Die klassische Gleichung für die kinetische Energie ist als Spezialfall in der relativistischen Gleichung enthalten.

Problem 2:

Gelten Impuls- und Energiesatz?

⇒ Ja, relativistische Masse verwenden.

Impulssatz:
In einem angeschlossenen System ist der relativistische Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße.

$$\Sigma \vec{p}_{Rel} = \Sigma m_{Rel} \cdot \vec{v} = \text{konst.}$$

Energiesatz:
Bei jedem Prozess bleibt die Summe der relativistischen Gesamtenergieen konstant.

$$\Sigma E = \Sigma m_{Rel} \cdot c^2 = \text{konst.}$$

Interessanter Zusammenhang: relativistischer Pythagoras

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m_0 = m_{rel} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad |^2$$

$$m_0^2 = m_{rel}^2 - m_{rel}^2 \frac{v^2}{c^2} \qquad | \cdot c^4$$

$$m_0^2 c^4 = m_{rel}^2 c^4 - m_{rel}^2 v^2 c^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$E_0^2 = E^2 - p^2 c^2$$

$$\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2c^2}$$ relativistischer Pythagoras

Systematisierung

Relativistische Effekte

- Relativität der Gleichzeitigkeit
- Zeitdilatation

  $$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Relativistische Masse

  $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Längenkontraktion

  $$\Delta l = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta l'$$

Masse – Energie – Äquivalenz

- Ruheenergie

  $$E_0 = m_0 c^2$$

- relativistische Energie

  $$E = m_{rel}\cdot c^2$$

  $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- kinetische Energie

  $$E_K = E - E_0$$

  $$\downarrow$$

  $$v \ll c$$

  $$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

Energie und Impuls

- E-Satz

  $$\sum m_{rel}\cdot c^2 = konst$$

- Impulssatz

  $$\vec{p} = m_{rel}\cdot\vec{v}$$

  $$\sum m_{rel}\cdot\vec{v} = konst$$

- relativistischer Pythagoras

  $$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

Additionstheorem der Geschwindigkeiten

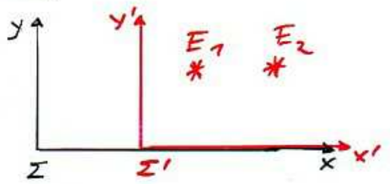
$$v_{Rel} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

1.6 Anhang

Berechnungen zur Lorentztransformation

Schema zur Anwendung der Lorentztransformation

2 Ereignisse



in Σ

$E_1(x_1, t_1)$ $E_2(x_2, t_2)$

in Σ'

$E_1'(x_1', t_1')$ $E_2'(x_2', t_2')$

Längen und Zeiten

$\Delta x = x_2 - x_1$ für $t_2 = t_1$

$\Delta x' = x_2' - x_1'$ für $t_2' = t_1'$

$\Delta t = t_2 - t_1$

$\Delta t' = t_2' - t_1'$

Analyse

- Wahl eines Bezugssystems für die Berechnung
- Entscheidung, welche der Größen $x_1, x_2, t_1, t_2, x_1', x_2', t_1', t_2'$ in diesem System zueinander gleich sind.
- Bestimmung der geg. und ges. Größen (oft Δ-Größen)

Auswahl der Transformationsgleichungen

was gilt für die gesuchte Größe

- $t_1 = t_2$ oder $x_1 = x_2$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $t_1' = t_2'$ oder $x_1' = x_2'$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

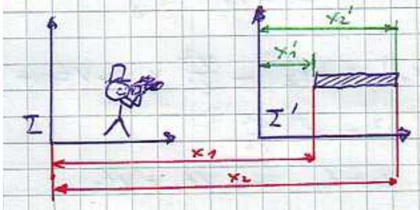
Anmerkung

Die Auswahl der "falschen" Transformationsgleichung vergrößert den Rechenaufwand, da sich Einzelterme nicht mehr zu Null addieren und weitertransformiert werden müssen, führt jedoch zum gleichen Ergebnis.

Berechnungen zur Längenkontraktion

Situation: Meterstab fliegt mit $v = 0{,}8c$ an uns vorbei
↳ mitbewegter Beobachter $L' = 1m$ → bekannt
↳ Länge L für ruhenden Beobachter: unbekannt

Beschreibung der Situation



mitbew. Beobacht.
$L' = x_2' - x_1'$
$L' = 1m$
Zeit beliebig, Stab in Ruhe

ruhender Beobachter: Foto zum Zeitpunkt $t = t_1 = t_2$
Stablänge $L = x_2 - x_1$

Gleichungen zur Auswahl

$$(1)\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(2)\quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

→ Entscheidung für Gl (1), da $t_1' \neq t_2'$ aber $t_1 = t_2$

Rechnung

$$L' = x_2' - x_1'$$

$$= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$L' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2 - x_1 = L \quad \text{(ges. Größe)}$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Beachte: bekannt ist L' (1m) gesucht ist L (Foto)

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L'$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$$

↳ $L < L'$: Längenkontraktion

Ein Stab, der an uns vorbei fliegt, scheint uns verkürzt. Dieser Effekt heißt Längenkontraktion.

Und weil Bewegung relativ ist:

Für einen schnell bewegten Beobachter verkürzen sich die Strecken in Bewegungsrichtung.

Berechnungen zur Zeitdilatation

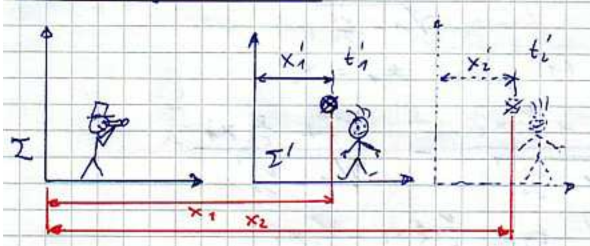
Situation: Blinker fliegt mit $v \approx 0{,}8c$ an uns vorbei

↳ mitbewegter Beobachter

∘ Blinker ortsfest $(x_1' = x_2')$

∘ Blinkzeit $\Delta t' = t_2' - t_1'$

Beschreibung der Situation



mitbew. Beobachter

$\Delta t' = t_2' - t_1'$

$x_1' = x_2'$

(Lampe ruht)

ruhender Beobachter: Lampe bewegt sich, blinkt an den Orten x_1, x_2 in Zeitabstand

$\Delta t = t_2 - t_1$

Berechnungen

$$x_2 = x_1 + v\,\Delta t$$

gesucht: $\Delta t = f(\Delta t', v)$

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{v}$$

Gleichungen zur Auswahl

$$x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - v t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Entscheidung (1)

weil $x_1' = x_2'$, aber $x_1 \neq x_2$

$$\Delta t = \frac{x_2' + v t_2' - x_1' - v t_1'}{v \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$x_1' = x_2'$

$$\Delta t = \frac{v t_2' - v t_1'}{v \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{\Delta t > \Delta t'}$$ Zeitdilatation

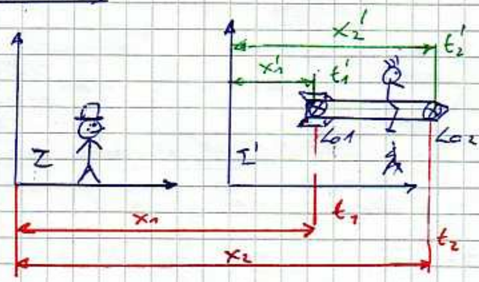
Ein schnell bewegter Blinker blinkt für einen ruhenden Beobachter langsamer, d.h. eine bewegte Uhr geht langsamer als eine ruhende.

In einem bewegten Bezugssystem vergeht die Zeit langsamer als in einem ruhenden Bezugssystem. Dieser Effekt heißt **Zeitdilatation**.

Berechnungen zur Relativität der Gleichzeitigkeit

Situation: An den Enden einer schnell fliegenden Rakete leuchten zwei Lampen auf. Ein mitfliegender Beobachter nimmt ihr Aufleuchten gleichzeitig wahr

Beschreibung



mitfliegender Beobachter
$t_1' = t_2'$
Lampen leuchten gleichzeitig

Berechnung

ruhender Beobachter registriert Lampen im Zeitintervall Δt

$\Delta t = 0 \rightarrow$ gleichzeitig

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ Lo2 leuchtet später auf

$\Delta t < 0$ Lo2 leuchtet früher

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

mögliche Gleichungen

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Auswahl: (1) weil $t_1' = t_2'$

$$\Delta t = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{v}{c^2}\,\frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

keine Gleichzeitigkeit, wenn $x_2' \neq x_1'$

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden, finden im anderen Bezugssystem nicht gleichzeitig statt. Der Zeitunterschied nimmt mit größer werdender Entfernung zu.

(Ende)

Magdeburg, im Dezember 2014